



## SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE TEK FAZLI TRANSFORMATÖRÜN ÇALIŞMA NOKTASININ BELİRLENMESİ

Ali İhsan ÇANAKOĞLU

Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik Elektronik  
Mühendisliği Bölümü, 43100, Kütahya, Türkiye  
acanakoglu@dumlupinar.edu.tr

Geliş Tarihi 19.06.2008

Kabul Tarihi 14.10.2008

### ÖZET

Transformatörler, elektrik enerjisinin uzak mesafelere iletilmesi, dağıtılması ve kullanılmasında vazgeçilmez elektrik makineleridir. Elektromekanik enerji dönüşümü yapmalarını sebebiyle verimleri oldukça yüksektir. Verimlerinin yüksekliği nüvede kullanılan ferromagnetik malzemeye bağlıdır. Tasarımları sırasında da bu malzemenin magnetik değerleri doğru bir şekilde kullanılmalıdır. Sayısal yöntemlerle, tasarlanmış bir transformatörün çalışma noktasının belirlenmesi, tasarımın doğruluğunu kontrol etmek için bir yoldur.

Bu çalışmada, tek fazlı bir transformatörün Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) kullanılarak, belirli bir yük empedansı için primer ve sekonder sargı akımları hesaplanmış ve deneysel değerlerle karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** *Transformatör, Sonlu Elemanlar Yöntemi, Çalışma Noktası.*

## DETERMINATION OF SINGLE-PHASE TRANSFORMER OPERATING POINT BY FINITE ELEMENT METHOD

### ABSTRACT

Transformers are essential electrical machines that are used in transmission and distribution of electrical energy. They have high efficiency because they don't have any mechanical part. Ferromagnetic material used in core is effect the efficiency, hence the magnetic characteristics of these materials are exactly determined by designers. Determination of operating point for single-phase transformer is useful for checking the design procedure. In this paper, operating point of a single-phase transformer was determined using Finite Element Method (FEM), and experimental and FEM result was compared.

**Key Words:** *Transformers, Operating Point, Finite Element Method.*

### 1. GİRİŞ

Elektrik makinelerinin tasarımı çok sayıda, karmaşık ve birbiri ile ilişkili mühendislik problemlerinin çözümünü içerir. Bir elektrik makinasının tasarımında elektromanyetik, ısı ve mekanik problemlerin dikkate alınması gerekir ve bütün özellikleri karşılayan ve ticari olarak uygulanabilecek bir tasarıma ulaşılması için çok sayıda irdeleme yapılması gerekmektedir.

Transformatörlerin SEY ile analizi, yöntemin elektrik mühendisliği disiplinde kullanılmaya başladığı zamanlara dayanır. Anderson transformatörlerdeki kaçak akımların analizine yönelik çalışması ile ilk SEY programının algoritmasını vermiştir [1]. Daha sonra Brauer geliştirdiği paket programlar ile bir çok elektrik makinasının yanı sıra transformatörlerin SEY ile analizine katkıda bulunmuştur [2]. Guangzheng ve arkadaşları

üç boyutlu transformatör SEY analizini vermişlerdir [3]. Son yıllarda ise gelişen CAD tabanlı pek çok SEY paket programı ile transformatörlerin analizi oldukça kolaylaşmıştır.

Bu çalışmada ise tek fazlı bir transformatörün iki boyutlu magnetik alan analizi yapılarak, sekonderindeki bir yük için sargı akımları hesaplanmıştır. Sargı akımları, magnetik alan analizinden elde edilen devre parametreleri kullanılarak iteratif bir yolla elde edilmiştir. Başlangıçta transformatörün boşa çalışma akımı tahmini bir değer alınarak sekonder sargı geriliminin tam değerine yaklaşılmaya çalışılmıştır. Elde edilen değerler deney sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

## 2. İKİ BOYUTLU ZAMANLA DEĞİŞEN MAGNETİK ALANLARIN SEY FORMÜLASYONU

Düşük frekanslı zamanla değişen problemlerin çözümünde quasi-statik Maxwell denklemleri kullanılır. Deplasman akımının ihmal edilmesi durumunda;

$$\nabla \cdot \nu \nabla A_z = \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + J_z$$

(1)

diferansiyel denkleminin çözümü gereklidir. Bu denklem difüzyon tipi diferansiyel denklemdir. Alternatif akım makinalarında kararlı hal veya zaman-harmonik şartlarının göz önüne alınmasıyla alan çözümünün elde edilmesi gerekir. (1)'de verilen denklemden kararlı hal AC çözümü için kompleks değişkenler göz önüne alınmalıdır. Dolayısıyla magnetik vektör potansiyel ve akım yoğunluğu vektörü kompleks büyüklükler olarak ele alınır:

$$A^C = A^R + jA^I$$

(2)

İndislerden  $C$  kompleks değişkenliği,  $R$  reel kısmı,  $I$  sanal kısmı gösterir. Bu durumda (1) eşitliği,

$$\nabla \cdot \nu \nabla A_z^C + j\omega \sigma A_z^C = J_z^C$$

(3)

olarak yazılır. Sonuçta varyasyonel formülasyon uygulanıp SEY eşitlikleri bir lineer üçgen eleman için matrisyel formda,

$$\{ \nu[K] + j\omega \sigma [C] \} [A] = [J]$$

(4)

şeklinde elde edilir [4]. (4)'teki matrislerin açılımları aşağıdaki şekildedir.

$$K_{ij}^e = \frac{\nu}{4A_e} (b_i b_j + c_i c_j)$$

(5)

$$C_{ij}^e = \frac{\omega \sigma A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(6)

Akım vektörünün de kompleks değişken olarak ele alınmasıyla bir eleman için açık yazılım aşağıdaki şekilde olur.

$$\begin{bmatrix} (3(b_1^2 + c_1^2) - 2j\alpha\Delta_e^2) & (3(b_1b_2 + c_1c_2) - j\alpha\Delta_e^2) & (3(b_1b_3 + c_1c_3) - j\alpha\Delta_e^2) \\ & (3(b_2^2 + c_2^2) - 2j\alpha\Delta_e^2) & (3(b_2b_3 + c_2c_3) - j\alpha\Delta_e^2) \\ & & (3(b_3^2 + c_3^2) - 2j\alpha\Delta_e^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^C \\ A_2^C \\ A_3^C \end{bmatrix}$$

simetrik

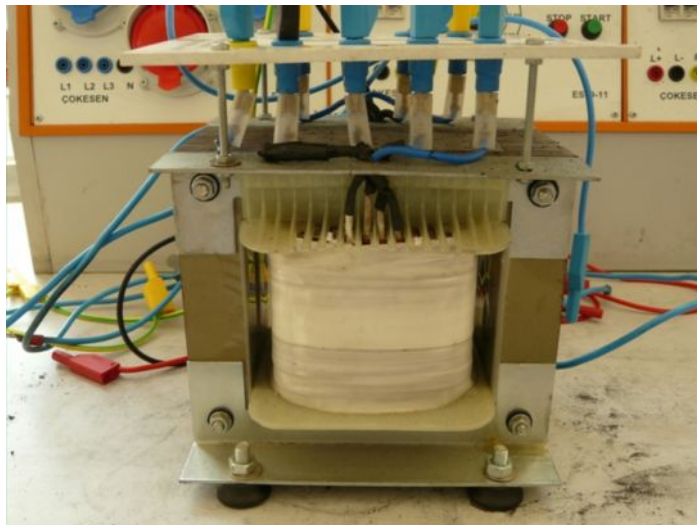
$$= 4\mu\Delta_e^2 \begin{bmatrix} J_R + jJ_I \\ J_R + jJ_I \\ J_R + jJ_I \end{bmatrix} \quad (7)$$

şeklinde elde edilir [5]. İfadelerde  $\alpha = \omega\sigma\mu$  alınmıştır.  $\omega$  açısal frekans,  $\sigma$  iletkenlik,  $\mu$  magnetik permeabilite,  $\nu$  magnetik relüktivitedir.  $\Delta_e$  üçgen elemanın alanı,  $A$  magnetik vektör potansiyel,  $J$  akım yoğunluğu değerleridir.  $b$  ve  $c$  eleman eneterpolasyon katsayılarıdır.

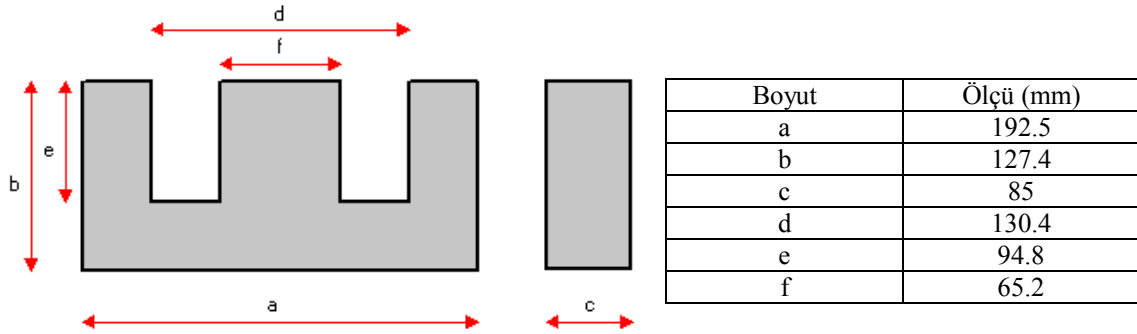
Nonlinear AC problemlerin çözümü de nonlinear DC problemlerin çözümüne benzer [6]. Zamanla değişen problemlerde adimsal çözümler ve harici devrelerin modellenmesi ile ilgili formülasyon, verilen referanslardan görülebilir [7].

### 3. BİR TRANSFORMATÖRÜN SEY İLE ANALİZİ

Transformatörler mekanik enerji dönüşümü yapmamaları ve hareketli parçaları olmaması sebebiyle SEY’de modellenmeleri kolay makinalardır. Analiz için ele alınan tek fazlı transformatör Şekil 1’de gösterilmiştir. Transformatör mantel tipi nüveye sahiptir. Etiket değerleri, 1500 VA, 380/220 V, 50 Hz’dir. Transformatörün boşa çalışma deneyinden primer sargı akımı 0.35A okunmuştur. Bu akım değeri SEY’de uygulanacak iteratif yöntem için başlangıç akımı olarak alınacaktır. Deney değerleri elde edilmemişse, nominal akımın %5’i kadar bir akım, boşa çalışma akımı olarak alınabilir. Transformatörün ölçüleri Şekil 2’de verilmiştir. SEY analizi için FEMM paket programı kullanılmıştır [8]. İteratif yöntem için gerekli kod, GNU Octave yazılımı üzerinden çalıştırılmıştır [9].

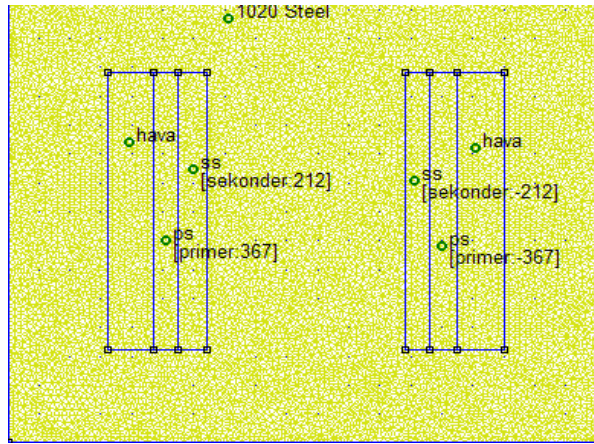


Şekil 1. Deney transformatörü.



Şekil 2. Transformatorün nüve boyutları.

Transformatorün primer sargı sarım sayısı 367, sekonderi 212 sarımdır. Şekil 2’de verilen ölçülerle transformatorün geometrisi FEMM programında tanımlanmış ve sonlu eleman ağı oluşturulmuştur. Oluşturulan geometri ve ağı yapısı Şekil 3’te görülmektedir.



Şekil 3. FEMM programında modellenen transformator ve sonlu eleman ağı yapısı.

Yük altında sargı akımları iteratif yolla bulunacağından, sadece primer sargıya boşa çalışma akımı başlangıç değeri olarak verilmiştir. Sargıların sadece sarım sayılarını FEMM’de modellemek yeterlidir. Nüvede kullanılan ferromagnetik malzeme için, FEMM programının kütüphanesinde yüklü bulunan 1020 Steel malzemesi seçilmiştir. Modelin bütün dış sınırlarında homojen Dirichlet sınır şartı tanımlanmıştır.

### 3. SARGI AKIMLARININ İTERATİF YÖNTEMLE HESAPLANMASI

FEMM programında sargılardaki akımlar modellendikten sonra, sargı uçlarındaki gerilim değeri devre parametresi olarak hesaplanabilir. Yaptığımız hesaplamada, primer sargıya uygulanan gerilimi, transformatorün boşa çalışma akımını ve yük empedansını vererek, sargı akımlarını bu yük değeri için hesaplama yoluna gidilmektedir.

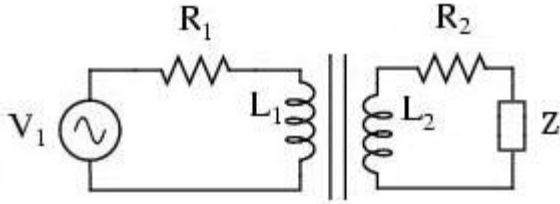
SEY ile yapılan hesaplamalarda, çözümü basitleştirmek açısından yapılan kabulleri şöyle sıralayabiliriz:

1. Sac levhalar arasında bulunan küçük hava aralıklarının relüktans etkisi.
2. Sac levhaların hadde yönü.
3. Sargı sonlarının empedansı.

Ancak FEMM programında malzeme tanımlamasından dolayı aşağıdaki özellikler de göz önüne alınmaktadır:

1. Sac levhalarda oluşan histerezis ve fuko kayıpları.
2. Sargı iletkenlerindeki deri etkisi.

Şekil 4'te tek fazlı bir transformatorün indirgenmemiş eşdeğer devresi görülmektedir. Bu devreye göre gerilim denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.



Şekil 4. Tek fazlı transformatorün eşdeğer devresi.

$$\begin{aligned} j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 + R_1 i_1 &= v_1 \\ j\omega M i_1 + j\omega L_2 i_2 + (R_2 + Z) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$R_1$  ve  $R_2$  primer ve sekonder sargı dirençlerini,  $L_1$  ve  $L_2$  sargı endüktanslarını,  $i_1$  ve  $i_2$  sargı akımlarını,  $v_1$  primer sargı gerilimini,  $Z$  yük empedansını,  $M$  ise sargı karşıt endüktansını göstermektedir. (8) eşitliği matrisel formda kısaca aşağıdaki yazabiliriz:

$$[Z_t + Z_l]\{I\} = \{V\} \quad (9)$$

$Z_t$  transformator sargı empedans,  $Z_l$  yük empedans matrisidir ve aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$Z_t = \begin{bmatrix} j\omega L_1 + R_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 + R_2 \end{bmatrix}, \quad Z_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \quad (10)$$

Gerilim ve akım vektörleri de aşağıdaki tanımlanırlar:

$$V = \begin{Bmatrix} v_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad I = \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Sargı empedansında düşen gerilimleri de aşağıdaki gibi tanımlayıp, (9) eşitliği ile düzenlersek, (13) eşitliğini yazabiliriz.

$$\{V_t\} = [Z_t]\{I\} \quad (12)$$

$$[Z_t + Z_l]\{I\} = \{V\} - \{V_t\} + [Z_t]\{I\} \quad (13)$$

(13) eşitliğini tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned}\{I\} &= [Z_t + Z_l]^{-1} (\{V\} - \{V_t\} + [Z_t]\{I\}) \\ &= [Z_t + Z_l]^{-1} (\{V\} - \{V_t\} - [Z_t]\{I\} + [Z_t] + [Z_l]\{I\}) \\ &= \{I\} + [Z_t + Z_l]^{-1} (\{V\} - \{V_t\} - [Z_t]\{I\})\end{aligned}\quad (14)$$

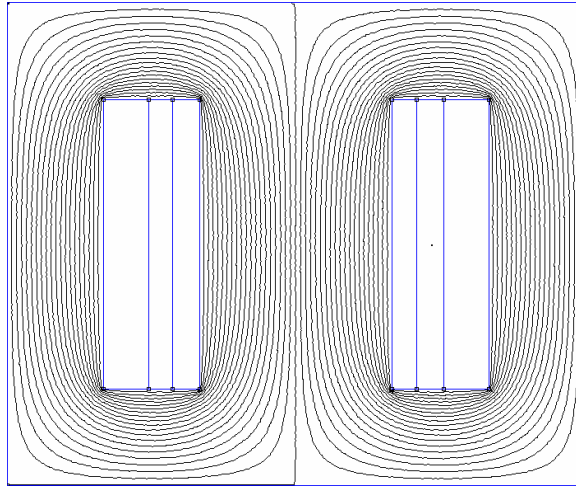
(14) eşitliğine göre elde edilen ifadeden akımlar için bir iteratif ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$i_{k+1} = i_k + (Z_t + Z_l)^{-1} (v - v_t(i_k) + Z_l i_k) \quad (15)$$

Elde edilen iteratif yöntemi kullanan Octave kodu yazılmıştır. Octave ile FEMM programını işletmek mümkün olmaktadır. Kodda tanımlanan değerler, FEMM'e aktarılabilmekte ve tanımlanan problem için iteratif yolla bir sonraki adımda elde edilen gerilim ve sargı empedans değerleri yeni değerler olarak alınarak, SEY çözümü tekrar yapılmaktadır. Akım için belirlene bir yakınsama değerine ulaşıldığında program sonlanmaktadır.

#### 4. ELDE EDİLEN SONUÇLAR

FEMM programında iteratif kod çalıştırılmadan sadece tanımlanan model için çözüm yapıldığında elde edilen magnetik vektör potansiyel dağılımı Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5. Magnetik Vektör Potansiyel dağılımı.

Transformatörün sekonderine direnci 50  $\Omega$  olan omik bir yük bağlanmıştır. Transformatörün boşa çalışma akımı olan 0.35 A değeri akım başlangıç değeri olarak verilmiştir. Octave çıktısı aşağıda görülmektedir. Sargı akımları sonuçlarından birincisi primer, ikincisi sekonder sargı akımıdır. Deneysel ve SEY sonuçları Tablo 1'de gösterilmiştir.

```
octave:9> trafom
1 1.273982
2 0.231902
3 0.041950
Sargı Akımları:
 2.4381 - 0.2479i
-4.1797 + 0.0020i
```

**Tablo 1.** Deney ve SEY sonuçları.

<i>Yöntem</i>	$I_1(A)$	$I_2(A)$
Deney	2.54	4.34
SEY	2.44	4.18

## 5. SONUÇ

Elektrik makinalarının SEY ile modellenmesinde karşılaşılan en büyük zorluk, nüvede kullanılan ferromagnetik malzemenin özelliklerini tam olarak tanımlayabilmektir. Bu çalışmada kullanılan transformatör, bir deney transformatörü olup, nüvede kullanılan malzeme için FEMM kütüphanesindeki en yakın malzeme seçilmiştir. Aynı zaman da transformatör iki boyutlu olarak modellendiğinden, sargı sonlarının empedansı, sargı uzunlukları hesaplanmak yoluna gidilerek dikkate alınmamıştır. Deney ve SEY sonuçları arasındaki fark bu iki sebepten kaynaklanmaktadır. Ancak Şekil 3'ten de görüleceği gibi, modellemede mümkün olan en fazla sayıda üçgen eleman kullanılarak, SEY'den elde edilecek hata minimuma indirilmeye çalışılmıştır. Eleman sayısının fazlalığı sadece çözüm süresini arttırmıştır. Bu çalışma ile, tasarlanan bir transformatörün, SEY ile belli bir yükteki sargı

akımlarının belirlenmesinin mümkün olduğu gösterilmiştir. Sargı akımlarının ve empedanslarının bilinmesi, transformatörün eşdeğer devre parametrelerinin de SEY ile yaklaşık olarak hesaplanabileceği anlamına gelmektedir.

## KAYNAKÇA

- [1] O., W., Anderson, Transformer leakage flux program based on the finite element method, IEEE Trans., Vol. PAS-92, 682-689, (March/April), 1973.
- [2] J., R., Brauer, Finite element analysis of selenoids, transformers, generators, and motors, The MacNeal Schwendler Corporation, Record of Cleveland Electronics Conference, IEEE No.78CH, 1300-1303, 1978.
- [3] Ni Guangzheng; Xu Xiaoming; Cheng Weiyang; Li Gangru; Jian Baidun; Fang Zhenghu; Li Xianghua; Xu Jitai, "FEM analysis of 3-D transformer leakage field and eddy current loss in the windings", Trans. On Magnetics. Vol. 28, Is. 2, p:1382-1385, 1992.
- [4] WILLIAMSON, S., BEGG, M. C., (1985), "Calculation of the Bar Resistance and Leakage Reactance of Cage Rotors with Closed Slots", IEE Proc., Vol-132, Pt.B, No.3:125-133.
- [5] BINNS, K. J., LAURENSEN, P. J., TROWBRIDGE, C. W., (1992), "The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields", 1st. ed., John Wiley & Sons, Chichester:232, 314-317.
- [6] RALPH, J. W., WILLIAMSON, S., (1983), "Solution of Two-Dimensional Non-Linear Field Problems with Sinusoidal Excitation Sources using First-Order Finite Elements", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-19:2433-2436.
- [7] BRAUER, J. R., MAC NEAL, B.E., HIRTENFELDER, F., (1993), "New Constraint Technique for 3D Finite Element Analysis of Multiturn Windings with Attached Electric Circuits", IEEE Trans. On Magnetics, Vol.MAG-29, No.6:2446-2448.
- [8] FEMM (Finite Element Method Magnetics), David MEEKER, <http://femm.foster-miller.net>
- [9] GNU Octave, <http://www.octave.org>.





